



МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**ИНСТИТУТ ТЕХНОЛОГИЙ (ФИЛИАЛ) ФЕДЕРАЛЬНОГО
ГОСУДАРСТВЕННОГО БЮДЖЕТНОГО ОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО УЧРЕЖДЕНИЯ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
В Г. ВОЛГОДОНСКЕ РОСТОВСКОЙ ОБЛАСТИ
(Институт технологий (филиал) ДГТУ в г. Волгодонске)**

Факультет Технологии и менеджмент

Кафедра Технический сервис и информационные технологии

Экономико-математическое моделирование в сервисе

*Методические рекомендации к самостоятельной работе
студентов заочной формы обучения
направления подготовки
43.03.01 Сервис профиль Сервис транспортных средств*

Волгодонск 2020

Автор:

Ст. преподаватель кафедры ТСиИТ Л.Н. Столяр

Методические рекомендации составлены с учётом требований федерального государственного образовательного стандарта высшего образования подготовки бакалавров. В помощь студентам предлагаются вопросы к экзамену, индивидуальное задание для самостоятельной работы студента, практические и тестовые задания, методические указания к практическим занятиям, основная и дополнительная литература.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение.....	4
1. Самостоятельная работа. Индивидуальное задание для самостоятельной работы студента...	5
2. Вопросы к зачету с оценкой.....	16
3. Практические задания.....	18
4. Методические рекомендации к практическим занятиям.....	20
5. Тестовые задания.....	30
6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины.....	35

Введение

В курсе «Экономико-математическое моделирование в сервисе» (ЭММ) содержится ряд существенных математических моделей экономических ситуаций. Несмотря на их идеализированность, они являются достаточно хорошей основой для понимания более реалистических и соответственно более сложных моделей, имеющих практическое значение. По существу, курс ЭММ представляет собой введение в математическую экономику сервиса, роль которой в управлении хозяйственной деятельностью сервиса возрастает, позволяет планировать производственно-хозяйственную деятельность предприятия сервиса с помощью методов оптимизации.

Целью изучения дисциплины «Экономико-математическое моделирование в сервисе» является – овладение теоретическими знаниями и практическими навыками, необходимыми для формирования у бакалавров компетенций в соответствии с требованиями ФГОС ВО бакалавриата по направлению подготовки 43.03.01 Сервис.

В процессе преподавания дисциплины «Экономико-математическое моделирование в сервисе» решаются **задачи** получения студентами следующих знаний:

- получение понятия о возможности применения математических методов при моделировании различных экономических ситуаций в сервисе;
- изучение сущности основ теории оптимальных решений необходимых для решения экономических задач сервиса;
- получение навыков использования основы экономических знаний при оценке эффективности результатов деятельности предприятий сервиса;
- получение навыков планировать производственно-хозяйственную деятельность предприятия сервиса с помощью методов оптимизации.

1. Самостоятельная работа

Наряду с прослушиванием лекций, изучением базовых учебников по курсу, практического занятия, студентам рекомендуется проведение самостоятельной работы.

Самостоятельная работа является неотъемлемым элементом учебного процесса, одним из основных методов освоения учебных дисциплин и овладения навыками профессиональной и научно-исследовательской деятельности.

При самостоятельной работе достигается конкретное усвоение учебного материала, развиваются теоретические способности, столь важные для современной подготовки специалистов.

Следует отметить, что самостоятельная работа студентов приносит результаты лишь тогда, если она является целенаправленной, систематической и планомерной.

Индивидуальное задание – это один из основных видов самостоятельной работы студентов (СРС) и важный этап их профессиональной подготовки. Основными целями выполнения индивидуального задания для СРС являются: расширение и углубление знаний обучающихся, выработка приемов и навыков в решении задач. Обучающийся, при выполнении индивидуального задания должен показать умение применять аналитические и геометрические методы решения задач.

Индивидуальное задание для самостоятельной работы студента

Индивидуальное задание состоит из пяти задач. В таблицах с условием задачи параметры **А** и **Б** имеют следующий смысл:

АБ – две последние цифры номера зачётной книжки студента.

А – число десятков в номере,

Б – число единиц в номере.

Студентам в процессе оформления индивидуального задания необходимо выполнить ряд требований:

- 1 Индивидуальное задание должно быть выполнено в стандартной тетради (12-18 листов) в клетку.
2. Все задачи должны содержать условие и развернутый ответ, т.е. выводы, сформулированные в терминах условия задачи.
3. Все таблицы должны быть пронумерованы и иметь названия.
4. При решении задач графическим методом все графики необходимо выполнять размером не менее чем пол листа.

Учитывая ситуацию дистанционного выполнения задания, необходимо каждый лист подписать, указать ФИО, курс, группу и отправить скан на почту преподавателя.

Защита индивидуального задания производится студентом в день его выполнения в соответствии с планом-графиком. Преподаватель проверяет правильность выполнения задания студентом, контролирует знание студентом пройденного материала с помощью контрольных вопросов или тестирования, что позволяет проконтролировать умения и навыки обучающегося.

1. Задача об оптимальном планировании производства

Фирма оказывает сервисные услуги на двух производственных участках (П1 и П2). При этом используется четыре вида ресурсов: оборудование, рабочая сила, и два вида сырья. Количество этих ресурсов в данном процессе известно и увеличено быть не может. Запас каждого ресурса расходы ресурсов и прибыль от реализации услуги на каждом из участков приведены в нижеследующей таблице. Определить объём оказания услуг на каждом из производственных участках, обеспечивающий максимальную прибыль от ее реализации.

Таблица 1.

Виды ресурсов	Производственные участки		Количество ресурсов
	П1	П2	
P1	2	1	A+10
P2	1	3	B+10
P3	1	4	10
Прибыль от реализации услуги	1	2	

Задание 1

1. Построить математическую модель задачи L1,
2. Решить задачу L1 графическим методом.
3. Найти целочисленное решение методом Гомори.

Задание 2

1. Решить задачу L1 симплекс – методом.
2. Сформулировать двойственную задачу L1+ (об оценивании ресурсов).
3. Построить математическую модель задачи L1+.
4. Решить задачу L1+, с помощью теорем двойственности.

2. Задача о смесях (L2)

Для приготовления смазочных смесей с заданными свойствами, используются два компонента первого и второго видов, содержащих химические элементы **A, B, C**. Стоимость 1 кг компонента первого вида равна 1 тыс. руб., компонента второго вида равна 2 тыс. руб. Содержание химических элементов в 1 кг компонента каждого вида и минимальные нормы их содержания в смазочных смесях приведены в нижеследующей табл. Составить такой состав для приготовления смазочных смесей, при котором общая стоимость была бы минимальной.

Химические элементы	Минимальные нормы содержания химического элемента в 1кг смеси.	Число грамм химич. элемента в 1 кг компонента	
		1	2
A	A+10	8	4
B	B+10	4	6
C	9	-	6

Задание 3

1. Построить математическую модель задачи L2.

2. Решить задачу L2 графическим методом.

3. Транспортная задача (L3)

Три завода (Π_i) выпускают автомобили, которые отправляются четырем потребителям B_j . Требуется поставить платформы автомобилей потребителям. Запасы груза у поставщиков и потребности потребителей приведены в таблице 3. Тарифы (транспортные расходы при перевозке единицы груза от каждого поставщика к каждому потребителю) заданы в виде матрицы C . Составить такой план транспортировки грузов от поставщиков к потребителям, чтобы суммарная стоимость перевозки была минимальной.

Таблица 3

Потребители Поставщики		В1	В2	В3	В4
		Потребности Запасы	20 (Б+1)	10(Б+1)	50(Б+1)
П1	40(Б+1)	А+1	А+5	А+2	А+4
П2	60(Б+1)	А+2	А+3	А+4	А+1
П3	20(Б+1)	А+3	А+1	А+4	А+2

$$\text{Матрица тарифов: } (C_{i,j}) = \begin{vmatrix} A+1 & A+5 & A+2 & A+4 \\ A+2 & A+3 & A+4 & A+1 \\ A+3 & A+1 & A+4 & A+2 \end{vmatrix}$$

Задание 4

1. Построить математическую модель задачи.
2. Построить опорный план методом северо-западного угла и методом наименьшей стоимости, сравнить стоимости перевозки.
3. Решить задачу L3 методом потенциалов.

4. Элементы теории игр

Задание 5. Решить задачи теории игр. (1 и 2)

Задача 1

Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые стратегии игроков.

1.

4	5	1
1	2	-2
6	7	3

8.

4	-1	6
3	-2	5
6	1	8

15.

5	0	7
-3	-8	-1
6	1	8

2.	5	3	1
	2	0	-2
	7	5	3

3.	5	3	4
	4	2	3
	7	5	6

4.	1	3	4
	4	6	7
	3	5	6

5.	7	3	4
	0	-4	-3
	9	5	6

6.	5	-2	7
	4	-3	6
	6	-1	8

7.	-1	-7	-4
	6	0	3
	5	-1	2

22.	5	-2	3
	1	-6	-1
	6	-1	4

23.	7	1	8
-----	---	---	---

9.	0	-1	6
	1	0	7
	2	1	8

10.	3	-1	6
	6	2	9
	5	1	8

11.	8	17	11
	6	15	9
	5	14	8

12.	8	4	11
	-4	-8	-1
	5	1	8

13.	-1	-7	2
	3	-3	6
	5	-1	8

14.	3	7	0
	6	10	3
	5	9	2

25.	-7	-1	-2
	0	6	5
	-1	5	4

26.	0	5	3
-----	---	---	---

16.	1	7	3
	-2	4	0
	6	12	8

17.	13	9	15
	-2	-6	0
	6	2	8

18.	5	6	7
	3	4	5
	6	7	8

19.	8	4	10
	3	-1	5
	6	2	8

20.	4	-2	5
	7	1	8
	5	-1	6

21.	8	-2	5
	11	1	8
	10	0	7

28.	0	4	3
	1	5	4
	-1	3	2

29.	8	1	9
-----	---	---	---

0	-6	1
3	-3	4

1	6	4
4	9	7

2	-5	3
7	0	8

24.

0	5	3
5	10	8
1	6	4

27.

6	5	7
2	1	3
7	6	8

30.

5	1	9
-2	-6	2
4	0	8

Задача 2

Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически.

1.

4	16	-8	1
-5	12	20	8

11.

3	8	0	2
-4	-2	20	12

21.

4	3	0	-2
3	1	8	2

2.

5	-1	-11	-6
-4	6	5	2

12.

-1	14	-1	-6
11	10	-5	-2

22.

1	11	-2	-4
3	10	-8	12

3.

10	-2	10	18
4	21	22	8

13.

4	6	12	8
7	10	4	13

23.

4	-6	2	8
1	4	5	3

4.

10	6	-18	18
4	2	10	8

14.

0	12	-2	-8
2	-8	-4	-2

24.

10	14	-8	8
-7	10	-4	13

5.

7	3	5	-11
3	2	2	5

15.

11	-4	-4	1
3	-2	4	-5

25.

2	9	3	7
8	7	9	6

6.

11	-4	8	17
----	----	---	----

16.

2	3	-2	7
---	---	----	---

26.

1	7	2	9
---	---	---	---

3	6	2	5
---	---	---	---

8	-3	1	6
---	----	---	---

9	11	7	3
---	----	---	---

7.

15	-5	11	3
7	-3	5	-11

17.

2	3	3	7
4	1	2	1

27.

-1	9	3	7
9	1	7	13

8.

-1	31	23	17
12	7	11	14

18.

5	-1	5	14
-4	13	5	7

28.

-3	15	5	15
4	-7	15	9

9.

-3	15	15	-15
-4	23	11	21

19.

10	7	4	9
-4	23	6	2

29.

10	2	14	9
5	9	3	3

10.

10	2	11	9
5	7	3	7

20.

3	4	7	2
5	1	3	9

30.

2	8	1	3
5	2	3	3

2. Вопросы к экзамену

Перечень вопросов для устного опроса Модели задач линейного программирования

1. Каковы основные предпосылки и принципы формирования экономико-математических моделей?
2. Что входит в структуру экономико-математической модели?
2. Что такое «целевая функция экономико-математической модели»?
3. Какой структурный элемент модели описывает условия функционирования объекта моделирования?
4. Какие существуют основные типы линейных моделей исследования операций?
5. Дайте экономическую интерпретацию линейной модели оптимального производственного планирования.
6. Дайте экономическую интерпретацию транспортной задачи.
7. Дайте экономическую интерпретацию задачи о назначениях.
8. Дайте экономическую интерпретацию задачи о раскрое.
9. Дайте экономическую интерпретацию задачи о диете.

Методы оптимизации

1. Какие задачи ЛП можно решать графическим методом?
2. Что такое угловая точка выпуклого множества?

3. Что такое линия уровня?
4. Сформулируйте алгоритм графического метода решения задачи ЛП.
5. Сколько решений может быть у задачи ЛП?
6. Что такое область допустимых решений задачи?
7. Что такое оптимальное решение задачи?
8. Что такое допустимое решение задачи?
9. Опишите алгоритм графического метода решения линейных задач.
10. Опишите алгоритм метода прямого перебора для решения линейных задач.

Транспортная задача

1. Запишите экономико-математическую модель транспортной задачи и дайте ее экономическую интерпретацию.
2. Чем отличаются закрытая и открытая модели транспортной задачи?
3. Как преобразовать открытую модель транспортной задачи в закрытую, если суммарный запас груза в пунктах отправления больше, чем суммарный спрос потребителей груза? Какова интерпретация дополнительных переменных в этой ситуации?
4. Как преобразовать открытую модель транспортной задачи в закрытую, если суммарный спрос потребителей превышает суммарный запас груза у поставщиков? Какова интерпретация дополнительных переменных в этой ситуации?
5. Что такое допустимый план транспортной задачи?
6. Что такое опорный план транспортной задачи?
7. Сформулируйте условие разрешимости транспортной задачи.
8. Что такое оптимальный план транспортной задачи?
9. Какие существуют методы нахождения опорного решения транспортной задачи?
10. Каким методом можно найти оптимальное решение транспортной задачи?
11. Что собой представляет цикл в таблице условий транспортной задачи?
12. Как осуществляется переход от одного опорного решения к другому в алгоритме метода потенциалов при решении транспортной задачи?
13. Сформулируйте критерий оптимальности транспортной задачи.
14. Запишите экономико-математическую модель задачи о назначениях и дайте ее экономическую интерпретацию.
15. Опишите условия сведения задачи о назначениях к транспортной задаче.

Двойственная задача ЛП

1. Дайте определение двойственной задачи к задаче линейного программирования.
2. Интерпретируйте экономическое содержание двойственной задачи к производственной задаче оптимального планирования.
3. Запишите двойственную задачу к транспортной задаче и дайте ее экономическую интерпретацию.
4. Запишите двойственную задачу к задаче о назначениях и дайте ее экономическую интерпретацию.
5. Запишите двойственную задачу к задаче о диете и дайте ее экономическую интерпретацию.
6. Запишите двойственную задачу к задаче о раскрое и дайте ее экономическую интерпретацию.

Целочисленное линейное программирование

1. Какова сущность задачи целочисленного программирования?
2. Почему при решении ЗЦП нельзя округлить найденное нецелочисленное решение?
3. В чём сущность методов отсечения для решения ЗЦП?
4. Какое отсечение называется правильным?
5. Что такое целая и дробная часть числа?
6. Опишите постановку линейной целочисленной задачи и обоснуйте необходимость требования целочисленности в экономических задачах исследования операций.
7. Запишите общий вид ограничения Гомори.
8. Сформулируйте условие неразрешимости задачи в целых числах.

Основы теории игр

1. Основные положения теории игр.
2. Сущность понятий «конфликтная ситуация» и «игра». Примеры конфликтных ситуаций в области малого и среднего бизнеса.
3. Классификация игр. Матричные игры.
4. Максиминные и минимаксные стратегии.
5. Решение игры в чистых стратегиях.
6. Чистые верхняя и нижняя цены игры и соотношения между ними.
7. Понятие о седловой точке платежной матрицы.
8. Смешанные стратегии.
9. Функция выигрыша в смешанных стратегиях.
10. Геометрическое решение игры.
11. Методы упрощения игры с платежной матрицей большой размерности.
12. Определение доминирования стратегий. Выбор оптимального метода решения. Обоснование своего выбора.
13. Алгоритм геометрического решения игры $2 \times N$.
14. Алгоритм геометрического решения игры $M \times 2$.

3. Практические задания

1. Решить графически ЗЛП при указанных ограничениях:

Задача №1.1	Задача №1.2
$L(X) = 4x_1 - 3x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} 5x_1 - 2x_2 \leq 20, \\ x_1 + 2x_2 \geq 10, \\ -7x_1 + 10x_2 \leq 80, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$L(X) = 2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 6, \\ x_1 + 2x_2 \geq 5, \\ 4x_1 + x_2 \geq 8, \\ -x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

Задача №1.3	Задача №1.4
$L(X) = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \geq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 \geq 3, \\ -x_1 + 4x_2 \leq 2, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$L(X) = -2x_1 + 5x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \leq 12, \\ x_1 + 2x_2 = 8, \\ x_1 + x_2 \geq 5, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$
Задача №1.5	Задача №1.6
$L(X) = x_1 + 6x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - 3x_2 \geq 6, \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 6, \\ 3x_1 + x_2 \geq 4, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$	$L(X) = -3x_1 - 2x_2 \rightarrow \max (\min)$ $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 2, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ -2x_1 + 6x_2 \leq 20, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases}$

2. Транспортная задача

Автотранспортная компания обеспечивает доставку шин с трех оптовых складов, расположенных в Москве, Нижнем Новгороде и Покрове в четыре магазина Волгодонского района. Определить оптимальный план обеспечивающий минимум транспортных издержек. Объемы запасов шин на складах, объемы заявок магазинов, тарифы транспортных издержках на перевозку единицы продукции приводятся в таблице.

ВАРИАНТ №1

Пункты отправления	Пункты назначения				Объём поставок
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	6	4	4	2	80
A ₂	7	3	8	6	130
A ₃	3	2	4	1	120
Объём заказов	90	65	70	105	

ВАРИАНТ №2

Пункты отправления	Пункты назначения				Объём поставок
	B ₁	B ₂	B ₃	B ₄	
A ₁	9	4	5	1	130
A ₂	5	8	2	4	100

A_3	1	7	7	2	110
Объём заказов	50	60	140	90	

ВАРИАНТ №3

Пункты отправления	Пункты назначения				Объём поставок
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	4	5	2	100
A_2	2	5	7	4	90
A_3	2	1	6	7	130
Объём заказов	80	60	100	80	

ВАРИАНТ №4

Пункты отправления	Пункты назначения				Объём поставок
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	6	3	4	100
A_2	1	10	5	3	90
A_3	6	9	5	2	120
Объём заказов	50	40	80	140	

ВАРИАНТ №5

Пункты отправления	Пункты назначения				Объём поставок
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7	4	4	2	60
A_2	5	3	8	7	80
A_3	3	3	6	5	100
Объём заказов	50	40	85	65	

3.Задачи теории игр

Вариант 1 Задача 1. Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые стратегии игроков. <table><tr><td>4</td><td>5</td><td>1</td></tr><tr><td>1</td><td>2</td><td>-2</td></tr><tr><td>6</td><td>7</td><td>3</td></tr></table> Задача 2. Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически. <table><tr><td>10</td><td>2</td><td>14</td><td>9</td></tr><tr><td>5</td><td>9</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	5	1	1	2	-2	6	7	3	10	2	14	9	5	9	3	3	Вариант 2 Задача 1. Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые стратегии игроков. <table><tr><td>4</td><td>-1</td><td>6</td></tr><tr><td>3</td><td>-2</td><td>5</td></tr><tr><td>6</td><td>1</td><td>8</td></tr></table> Задача 2. Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически <table><tr><td>2</td><td>8</td><td>1</td><td>3</td></tr><tr><td>5</td><td>2</td><td>3</td><td>3</td></tr></table>	4	-1	6	3	-2	5	6	1	8	2	8	1	3	5	2	3	3
4	5	1																																	
1	2	-2																																	
6	7	3																																	
10	2	14	9																																
5	9	3	3																																
4	-1	6																																	
3	-2	5																																	
6	1	8																																	
2	8	1	3																																
5	2	3	3																																
Вариант 3 Задача 1. Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые	Вариант 4 Задача 1. Используя минимаксные стратегии, определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей, цену игры и оптимальные чистые																																		

стратегии игроков.

5	0	7
-3	-8	-1
6	1	8

Задача 2.
Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически.

-1	9	3	7
9	1	7	13

стратегии игроков.

5	3	1
2	0	-2
7	5	3

Задача 2.
Определить верхнюю и нижнюю цену игры, заданной платежной матрицей. Упростить игру, если это возможно. Найти решение в смешанных стратегиях графически.

-3	15	5	15
4	-7	15	9

4. Методические рекомендации к практическим занятиям

Алгоритм графического метода

1. Получить уравнения прямых путем замены в ограничениях задачи знаков неравенств на знаки точных равенств и построить эти прямые.
2. Найти и заштриховать полуплоскости, определяемые и разрешаемые каждым из ограничений-неравенств задачи. Ограничения-равенства разрешают только те точки, которые лежат на соответствующей прямой.

Для этого необходимо подставить в конкретное неравенство координаты какой-либо точки, например, (0;0) и после этого проверить истинность полученного неравенства.

Если неравенство истинное **то** заштриховать полуплоскость, содержащую, точку (0;0);

иначе (неравенство ложное) **то** заштриховать полуплоскость, не содержащую точку (0;0).

Поскольку x_1 и x_2 должны быть неотрицательными, то их допустимые значения всегда будут находиться выше оси Ox_1 и правее оси Ox_2 , т.е. в 1-м квадранте.

3. Определить область допустимых решений (ОДР) как часть плоскости, принадлежащую одновременно всем разрешенным областям, и заштриховать ее.

ОДР всегда представляет собой **выпуклую** фигуру, т.е. обладающую следующим свойством: если две точки А и В принадлежат этой фигуре, то и весь отрезок АВ принадлежит ей.

4. Построить вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$ с координатами из коэффициентов ЦФ при x_1 и x_2 , который начинается в точке (0;0) и заканчивается в точке $(c_1; c_2)$. Вектор $\vec{N} = (c_1; c_2)$ показывает направление возрастания значений целевой функции.

5. Построим **целевую прямую** $c_1x_1 + c_2x_2 = 0$. Эта прямая проходит через начало координат перпендикулярно вектору $\vec{N} = (c_1; c_2)$.

6. Чтобы найти точку (или точки), в которой ЦФ принимает max (или min) значение или установить, что ЦФ не ограничена на множестве планов сверху или снизу, передвигаем целевую прямую в направлении вектора $\vec{N}$ при поиске max ЦФ или в направлении противоположном вектору $\vec{N}$ при поиске min ЦФ. Оптимальное решение не

может находиться внутри ОДР, а только на ее границе, а именно, в последней вершине многоугольника, через которую пройдет целевая прямая, или на всей его стороне. Допустимое решение, лежащее в вершине ОДР, называется **опорным решением** (планом).

7. Определить координаты точки максимума (минимума) ЦФ и вычислить значение ЦФ. Для точного определения координат оптимальной точки X^* необходимо решить систему уравнений прямых, на пересечении которых находится X^* .

Пример 1

$$L(X) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ 2x_1 + x_2 \leq 8, \\ -x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_2 \leq 2, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

1. Построим следующие прямые (см.рис.1)

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \\ -x_1 + x_2 = 1, & (3) \\ x_2 = 2. & (4) \end{cases}$$

Для этого вычислим координаты точек пересечения этих прямых с осями координат

$$\begin{aligned} (1): & \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 3, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 6, \\ x_2 = 0, \end{cases} & (2): & \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 8, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 4, \\ x_2 = 0, \end{cases} \\ (3): & \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 1, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

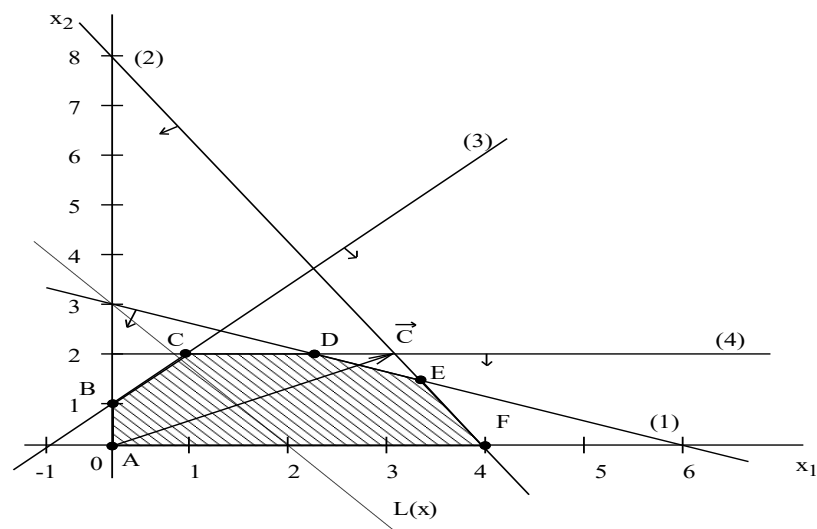


Рис.1. График решения задачи 1

2. Определим область допустимых решений: ОДР - это многоугольник ABCDEF.

3. Построим вектор $\vec{N}(3,2)$ в точке $(0,0)$. Целевую прямую можно построить перпендикулярно этому вектору

4. Перемещаем целевую прямую параллельно себе в направлении вектора $\vec{N}$. Точка E - это последняя вершина многоугольника допустимых решений, через которую проходит целевая прямая, двигаясь по направлению вектора $\vec{N}$ т.е. т.Е - это точка максимума ЦФ.

5. Найдем координаты точки E, как решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 6, & (1) \\ 2x_1 + x_2 = 8, & (2) \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{10}{3} = 3\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{4}{3} = 1\frac{1}{3},$$

т. е. $E\left(3\frac{1}{3}; 1\frac{1}{3}\right)$ - точка максимума. Таким образом, максимальное значение ЦФ равно

$$L(E) = 3 \cdot \frac{10}{3} + 2 \cdot \frac{4}{3} = 12\frac{2}{3} \text{ [руб.]}$$

При решении некоторых ЗЛП графическим методом может встретиться случай, когда линия уровня параллельна одной из сторон выпуклого многоугольника допустимых решений, причем эта сторона расположена в направлении смещения линии уровня при стремлении целевой функции к своему оптимуму. В этом случае оптимальное значение целевой функции достигается не в одной, а в двух угловых точках (вершинах) многоугольника решений и, следовательно, во всех точках отрезка, соединяющего эти вершины, т.е. задача будет иметь бесчисленное множество решений.

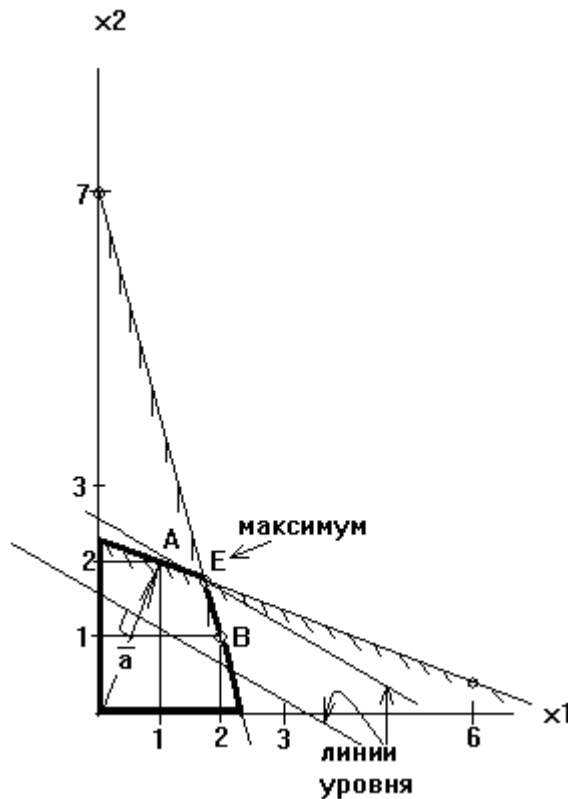
Если область допустимых решений является незамкнутом выпуклым многоугольником в направлении оптимизации целевой функции, то целевая функция будет неограниченной и ЗЛП не будет иметь решений; в этом случае условно можно записать, что, например, $\max f(\bar{X}) = +\infty$.

Очевидно также, что ЗЛП не будет иметь решений в случае, когда область допустимых решений есть пустое множество, т.е. система ограничений ЗЛП содержит противоречивые неравенства, и на координатной плоскости нет ни одной точки, удовлетворяющей этим ограничениям.

Решение задачи целочисленного ЛП графическим методом

Решить графическим способом задачу целочисленного ЛП:

$$\begin{aligned} F &= x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ \begin{cases} 3x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad x_1, x_2 - \text{целые.} \end{cases} \end{aligned}$$



Накладываем на область допустимых решений задачи целочисленную решетку, поскольку оптимальное решение нецелочисленное (точка E). На этой решетке имеются две вершины (A и B) с целочисленными координатами $(1,2)$ и $(2,1)$, соответственно. Они попадают в область допустимых решений и близки к оптимальному нецелочисленному решению. Перемещаем параллельным переносом линию уровня, проходящую через оптимальную нецелочисленную точку E , до первой встречи с вершиной построенной целочисленной решетки. Первой встречается точка A . Координаты этой точки $(1,2)$ принимаются за оптимальное целочисленное решение $x_1=1, x_2=2$. Тогда целевая функция $F=5$.

Симплекс-метод

Найти оптимальное решение следующей задачи симплекс-методом.

$$F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$$

$$3x_1 + x_2 \leq 7,$$

$$x_1 + 3x_2 \leq 7,$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

Приводим задачу к каноническому виду. Для этого введем фиктивные переменные $x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$.

$$\begin{cases} F - x_1 - 2x_2 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 = 7, \\ x_1 + 3x_2 + 0 \cdot x_3 + x_4 = 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0. \end{cases}$$

Строим симплекс-таблицу.

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4
X_3	7	3	1	1	0
$\rightarrow X_4$	7	1	3	0	1
F	0	-1	-2	0	0

			↑		
--	--	--	---	--	--

В строке целевой функции имеются два отрицательных элемента (-1 и -2). Выбираем наибольший по модулю (-2). Поэтому столбец X_2 будет разрешающим столбцом ($k = 2$).

Выбираем разрешающую строку. Для этого считаем отношение $\frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_i}{a_{i2}}$.

Для строки X_3 оно равно $7/1 = 7$. Для строки X_4 оно равно $7/3$ и является минимальным. Поэтому разрешающей строкой будет строка X_4 . Разрешающим элементом будет элемент, равный 3. Пересчитываем таблицу. Вместо переменной X_4 в базисное решение вводим переменную X_2 . Новый базисный вектор X_2 должен будет иметь компоненты $(0,1,0)$. Поскольку на месте разрешающего элемента стоит 3, то делим разрешающую строку на 3. Остальные строки пересчитываем по правилу алгоритма так, чтобы в новой таблице в строках X_3 и F в столбце X_2 появились нули. Разрешающую строку X_2 в новой таблице умножаем на множитель (-1) для строки X_3 и на множитель 2 для строки F . Расчеты приведены в таблице:

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4
$\rightarrow X_3$	$(7/3) \cdot (-1) + 7 = 14/3$	$(1/3)(-1) + 3 = 8/3$	$1 \cdot (-1) + 1 = 0$	$0 \cdot (-1) + 1 = 1$	$(1/3)(-1) + 0 = -1/3$
X_2	$7/3$	$1/3$	$3/3 = 1$	$0/3 = 0$	$1/3$ *
F	$(7/3) \cdot 2 + 0 = 14/3$	$(1/3) \cdot 2 + (-1) = -1/3$ ↑	$1 \cdot 2 + (-2) = 0$	$0 \cdot 2 + 0 = 0$	$1/3 \cdot 2 + 0 = 2/3$

В строке целевой функции остался один отрицательный элемент (-1/3). Поэтому столбец X_1 будет разрешающим столбцом ($k = 1$). Выбираем разрешающую строку. Для

этого считаем отношение $\frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_i}{a_{i1}}$. Для строки X_3 оно равно $14/3 : 8/3 = 7/4$. Для строки

X_2 оно равно $7/3 : 1/3 = 7$. Выбираем минимальное. Поэтому разрешающей строкой будет строка X_3 . Разрешающим элементом будет элемент, равный 8/3. Пересчитываем таблицу. Вместо переменной X_3 в базисное решение вводим переменную X_1 . Новый базисный вектор X_1 должен будет иметь компоненты $(1,0,0)$. Поскольку на месте разрешающего элемента стоит 8/3, то умножаем разрешающую строку на 3/8. Остальные строки пересчитываем по правилу алгоритма так, чтобы в новой таблице в строках X_2 и F в столбце X_1 появились нули. Разрешающую строку X_1 в новой таблице умножаем на множитель (-1/3) для строки X_2 и на множитель 1/3 для строки F . Расчеты приведены в таблице:

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	$14/3 \cdot 3/8 = 7/4$	$8/3 \cdot 3/8 = 1$	$0 \cdot 3/8 = 0$	$1 \cdot 3/8 = 3/8$	$-1/3 \cdot 3/8 = -1/8$ *
X_2	$7/4(-1/3) + 7/3 = 7/4$	$1(-1/3) + 1/3 = 0$	$0(-1/3) + 1 = 1$	$3/8(-1/3) + 0 = -1/8$	$-1/8(-1/3) + 1/3 = 3/8$
F	$7/4 \cdot (1/3) + 14/3 = 21/4$	$1 \cdot (1/3) - 1/3 = 0$	$0 \cdot (1/3) + 0 = 0$	$3/8 \cdot (1/3) + 0 = 1/8$	$-1/8 \cdot (1/3) + 2/3 = 5/8$

Оптимальное базисное решение найдено, т.к. в строке целевой функции нет отрицательных элементов. $X_1=7/4$, $X_2=7/4$, $F=21/4$. Произведем проверку правильности решения $F = x_1 + 2x_2 = 7/4 + 2 \cdot 7/4 = 21/4$. Верно.

Двойственная задача

1. Составить двойственную задачу к задаче:

$$\begin{cases} F = x_1 + 2x_2 \rightarrow \max \\ 3x_1 + x_2 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 \leq 7, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

решить двойственную задачу симплекс-методом, проверить выполнение теорем двойственности.

Первоначально составим задачу в симметрической форме, а потом приведем ее к каноническому виду. Матрица технологических коэффициентов в прямой задаче является транспонированной к матрице в двойственной задаче.

$$\begin{cases} Z = 7y_1 + 7y_2 \rightarrow \min \\ 3y_1 + y_2 \geq 1, \\ y_1 + 3y_2 \geq 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0. \end{cases}$$

Канонический вид двойственной задачи:

$$\begin{cases} Z - 7y_1 - 7y_2 = 0 \\ 3y_1 + y_2 - y_3 = 1, \\ y_1 + 3y_2 - y_4 = 2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} Z - 7y_1 - 7y_2 = 0 \\ -3y_1 - y_2 + y_3 = -1, \\ -y_1 - 3y_2 + y_4 = -2, \\ y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 \geq 0. \end{cases}$$

По канонической форме составляем симплекс-таблицу:

Базисные переменные	Свободные члены	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4
Y_3	-1	-3	-1	1	0
$\rightarrow Y_4$	-2	-1	-3	0	1
Z	0	-7	-7 ↑	0	0
Оцен. отн		$(-7)/(-1)=7$	$(-7)/(-3)=7/3$	- Б	- Б
$\rightarrow Y_3$	-1/3	-8/3	0	1	-1/3
Y_2	2/3	1/3	1	0	-1/3
Z	14/3	-14/3 ↑	0	0	-7/3
Оцен. отн		$14/3:8/3=7/4$	- Б	- Б	$-7/3:(-1/3)=7$
Y_1	1/8	1	0	-3/8	1/8
Y_2	5/8	0	1	1/8	-3/8
Z	21/4	0	0	-7/4	-7/4

БР (1/8, 5/8,0,0) –опт

Оптимальное решение найдено, поскольку в строке целевой функции, кроме столбца свободных членов нет положительных элементов, а в столбце свободных членов нет отрицательных элементов.

Оптимальное решение: $y_1 = 1/8, y_2 = 5/8, Z = 21/4$

Проверим найденное решение:

- 1) $Z - 7y_1 - 7y_2 = 21/4 - 7 \cdot 1/8 - 7 \cdot 5/8 = 0$ – верно.
- 2) Теоремы двойственности выполняются. Это можно увидеть, посмотрев на расположенную ниже итоговую таблицу **прямой** задачи:

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4
X_1	7/4	1	0	3/8	-1/8
X_2	7/4	0	1	-1/8	3/8
F	21/4	0	0	1/8	5/8

БР (7/4, 7/4,0,0) –опт

Оптимальное решение двойственных задач равны друг другу: Составим прямое соответствие:

$$\begin{array}{cccc|cccc}
 x_1 & x_2 & & & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\
 & & & & | & | & | & | \\
 y_5 & y_6 & | & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 &
 \end{array}$$

$$F_{\max} = Z_{\min} = 21/4.$$

б) Компоненты оптимального решения двойственной задачи равны абсолютным значениям коэффициентов при соответствующих переменных целевой функции исходной задачи, выраженной через неосновные переменные ее оптимального решения. А именно,

$$y_1 = 1/8 \leftrightarrow X_3, y_2 = 5/8 \leftrightarrow X_4,$$

$$x_1 = 7/4 \leftrightarrow y_3, x_2 = 7/4 \leftrightarrow y_4.$$

2. Составить двойственную задачу к задаче L_1 и найти её решение с помощью теорем двойственности.

$$L_1: F = 2x_1 + 3x_2 \Rightarrow \max$$

$$S: \begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ 2x_1 + x_2 \leq 16 \\ x_2 \leq 5 \\ 3x_1 \leq 4 \\ x \geq 0 \ (i = 1, 2) \end{cases}$$

$$L_1^*: Z = 18y_1 + 16y_2 + 5y_3 + 24y_4 \Rightarrow \min$$

$$S: \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 3y_4 \geq 2 \\ 3y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0 \ (i = 1, 4)$$

На последнем шаге симплекс - метода было получено:

$$Б.Р. X^*(6, 4, 0, 0, 1, 3)$$

Базисные переменные	Свободные члены	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6
------------------------	--------------------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

F	24	0	0	4/5	3/5	0	0	Б.Р.(6,4,0,0,1,3) –opt
---	----	---	---	-----	-----	---	---	------------------------

Последняя строка имеет вид: $F(X^*) = 24 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4$

ТЗ: Положительным (ненулевым) компонентам оптимального решения одной из взаимодвойственных задач соответствуют нулевые компоненты оптимального решения двойственной задачи.

Составим прямое соответствие: $x_1 \ x_2 \mid x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6$

$$\begin{array}{cccccc} | & | & | & | & | & | \\ y_5 & y_6 & | & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array}$$

Решение двойственной задачи Y^* определяем, пользуясь теоремой 3 и составленным соответствием:

$$y^* \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}, 0, 0, 0, 0 \right)$$

Транспортная задача

Транспортная задача решается в два этапа: составление опорного плана и улучшение решения – нахождение оптимального плана.

Решение начинается с составления опорного плана методом северо-западного угла. Результат приведен в таблице.

Пункты отправления	Пункты назначения				Объёмы поставок a_i	Потенциал ы α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	9 70	1 + 5 80	3 60	6 120	70	0
A_2	40	4	6	10	180	-4
A_3	1	4	7	2	130	-3
Объёмы заказов b_j	110	80	70	120		
Потенциалы β_j	9	8	10	5		

Транспортные издержки первого опорного плана равны

$$L_1(X) = 9 \cdot 70 + 5 \cdot 40 + 4 \cdot 80 + 6 \cdot 60 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 120 = 1820 [\text{руб.}].$$

На втором этапе определяется оптимальный план перевозок путём последовательного улучшения плана методом потенциалов.

Проверяем план Таблицы Т1 на оптимальность: для всех нулевых перевозок $c_{ij}^* \leq c_{ij}$.

Введем потенциалы и для занятых клеток составим систему уравнений

$c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ и, принимая $\alpha_1 = 0$, рассчитываем значения потенциалов:

$$\alpha_1 + \beta_1 = 9$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = 9$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 5$$

$$\alpha_2 = -4$$

$$\beta_2 = 8$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 4$$

$$\alpha_3 = -3$$

$$\beta_3 = 10$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 6$$

$$\beta_4 = 5$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 7$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 2$$

Для незанятых клеток (нулевые перевозки) найдем $c_{ij}^* = \alpha_i + \beta_j$ и $\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$:

Номер клетки	$c_{ij}^* = \alpha_i + \beta_j$	c_{ij}	$\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$
(1,2)	8	1	7
(1,3)	10	3	7
(1,4)	5	6	-1
(2,4)	1	10	-9
(3,1)	6	1	5
(3,2)	5	4	1

Условие оптимальности: $\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij} \leq 0$ не выполнено и полученный план не оптимальный.

Для нулевой перевозки $A_1 \rightarrow B_2$ (клетка с самой большой положительной оценкой: $\tau_{12} = 7$) составляем цикл переноса перевозки (Таблица Т1), представляющий собой

прямоугольную фигуру, в одной из вершин которой нулевая перевозка, а в остальных – ненулевые перевозки.



Максимально возможный объём переноса перевозки равен меньшей из уменьшаемых величин, а именно 70 единиц ($A_1 \rightarrow B_1$). $\min(70; 80) = 70$. При этом стоимость перевозки будет уменьшена на величину, равную произведению объёма переноса на $\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$ ((i,j) номер той клетки по которой выполнялся перенос перевозки). В нашем случае уменьшение транспортных издержек составит $70 \cdot 7 = 490$ [руб.]. Улучшенный план приведен в таблице T2.

Второй шаг оптимизации выполнен в таблице T2, а результат приведен в таблице T3.

Таблица T2

Пункты отправления	Пункты назначения				Объёмы поставок a_i	Потенциал ы α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	9 1 70		3	6	70	0
A_2	- 5 110	4 10	+ 6 60	10	180	3
A_3	+ 1 120	4	7 10	2	130	4
Объёмы заказов b_i	110	80	70	120		
Потенциалы β_i	2	1	3	-2		

$$L_2(X) = 1 \cdot 70 + 5 \cdot 110 + 4 \cdot 10 + 6 \cdot 60 + 7 \cdot 10 + 2 \cdot 120 = 1330 \text{ [руб.]}$$

Контроль: $L_2(X) = 1820 - 490 = 1330$.

Проверяем план Таблицы T1 на оптимальность: для всех нулевых перевозок $c_{ij}^* \leq c_{ij}$. Введем потенциалы и для занятых клеток составим систему уравнений $c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ и, принимая $\alpha_1 = 0$, рассчитываем значения потенциалов:

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 5$$

$$\alpha_2 = 3$$

$$\beta_2 = 1$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 4$$

$$\alpha_3 = 4$$

$$\beta_3 = 3$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 6$$

$$\beta_4 = -2$$

$$\alpha_3 + \beta_3 = 7$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 2$$

Для незанятых клеток (нулевые перевозки) найдем $c_{ij}^* = \alpha_i + \beta_j$ и $\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$:

Номер клетки	$c_{ij}^* = \alpha_i + \beta_j$	c_{ij}	$\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij}$
(1, 1)	2	9	-7
(1, 3)	3	3	0
(1, 4)	-2	6	-8
(2, 4)	8	10	-2
(3, 1)	6	1	5
(3, 2)	5	4	1

Условие оптимальности: $\tau_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij} \leq 0$ не выполнено и полученный план не оптимальный.



Пункты отправления	Пункты назначения				Объёмы поставок a_i	Потенциалы α_i
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	2 9	1 70	3 3	3 6	70	0
A_2	5 100	4 10	6 70	10 6	180	3
A_3	1 10	0 4	2 7	2 120	130	-1
Объёмы заказов b_j	110	80	70	120		
Потенциалы β_j	2	1	3	3		

$$L_3(X) = 1330 - 5 \cdot 10 = 1280.$$

Введем потенциалы и для занятых клеток составим систему уравнений $c_{ij} = \alpha_i + \beta_j$ и, принимая $\alpha_1 = 0$, рассчитываем значения потенциалов:

$$\alpha_1 + \beta_2 = 1$$

$$\alpha_1 = 0$$

$$\beta_1 = 2$$

$$\alpha_2 + \beta_1 = 5$$

$$\alpha_2 = 3$$

$$\beta_2 = 1$$

$$\alpha_2 + \beta_2 = 4$$

$$\alpha_3 = -1$$

$$\beta_3 = 3$$

$$\alpha_2 + \beta_3 = 6$$

$$\beta_4 = 3$$

$$\alpha_3 + \beta_1 = 1$$

$$\alpha_3 + \beta_4 = 2$$

Для незанятых клеток (нулевые перевозки) найдем $c_{ij}^* = \alpha_i + \beta_j$. В левом верхнем углу каждой незанятой клетки таблицы ТЗ приведены значения c_{ij}^* . План, приведенный в таблице ТЗ, удовлетворяет условию оптимальности: для всех нулевых перевозок $c_{ij}^* \leq c_{ij}$.

Теория игр

1. Игра задана платёжной матрицей:

$$\begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 6 & 9 \\ 7 & 4 & 2 & 6 \\ 8 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Определим верхнюю и нижнюю цену игры. Поскольку первый игрок придерживается максиминной стратегии, для каждой из стратегий первого игрока определяется наихудший вариант (наименьший выигрыш), а затем из них выбирается наилучший (наибольший). Нижняя цена игры: $\alpha = \max_i \min_j a_{ij}$

Второй игрок следует минимаксной стратегии: для каждой стратегии второго игрока выбирается наихудший вариант (наибольший проигрыш), а затем из них выбирается наилучший (наименьший).

Верхняя цена игры: $\beta = \min_j \max_i a_{ij}$.

Для заданной платежной матрицы находим:

	B_1	B_2	B_3	B_4	$\alpha_i = \min_j$
A_1	4	9	5	3	a_{ij}^3
A_2	7	8	6	9	6
A_3	7	4	2	6	2
A_4	8	3	4	7	3
$\beta_j = \max_i$	8	9	6	9	$\alpha = \max_i$

Поскольку $\alpha = \beta = 6$, то игра имеет седловую точку, и существует оптимальное решение игры в чистых стратегиях.

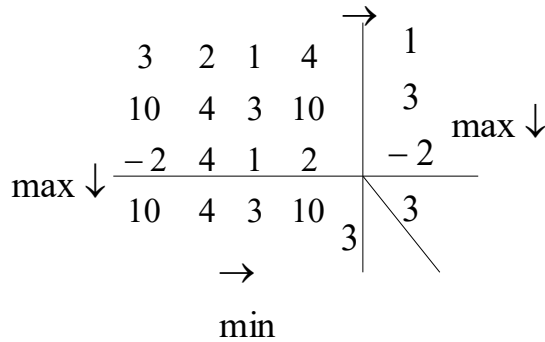
Оптимальная стратегия первого игрока - A_2 , оптимальная стратегия второго игрока - B_3 . Цена игры $v = 6$.

2. Найти решение игры, заданной матрицей

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 4 \\ 10 & 4 & 3 & 10 \\ -2 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Проверим наличие седловой точки

min



Имеется седловая точка, т.к. $3=3$.

Следовательно, оптимальной для игрока A является стратегия A_2 , для игрока B – стратегия B_3 . При этом выигрыш игрока A – не менее 3, проигрыш игрока B – не более 3.

$$p^* = (0, 1, 0), \quad q^* = (0, 0, 1, 0).$$

3. Найти оптимальные стратегии и цену игры с матрицей

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем, $a_{11}=1$, $a_{12}=3$, $a_{21}=2$, $a_{22}=-1$.

Игра не строго определенная. Воспользуемся формулами

$$p_1 = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad p_2 = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},$$

$$q_1 = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \quad q_2 = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}$$

$$V = \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

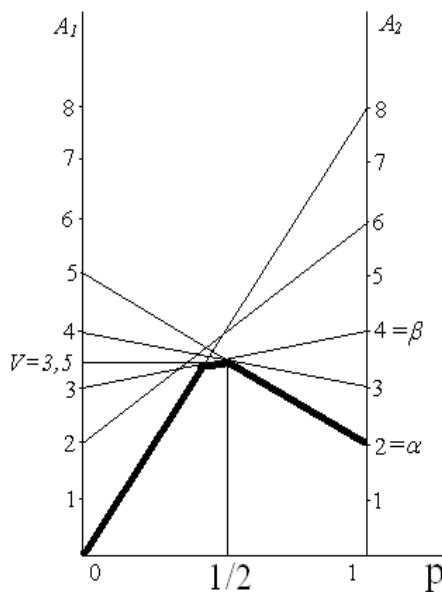
$$V = \frac{1 \cdot (-1) - 3 \cdot 2}{1 + (-1) - 3 - 2} = \frac{-7}{-5} = \frac{7}{5};$$

$$p_1 = \frac{-1 - 2}{-5} = \frac{3}{5}; \quad p_2 = \frac{1 - 3}{-5} = \frac{2}{5} = 1 - p_1; \quad q_1 = \frac{-1 - 3}{-5} = \frac{4}{5}; \quad q_2 = \frac{1 - 2}{-5} = \frac{1}{5} = 1 - q_1.$$

Итак, $V = \frac{7}{5}$, $\vec{p} = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, $\vec{q} = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

4. Графически решить игру: $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Действуя по алгоритму геометрического нахождения игры 2ЧН (рисунок 1), находим, что цена игры $V=3,5$, нижняя цена игры: $\alpha=2$, верхняя цена игры: $\beta=4$, оптимальная



стратегия игрока A: $P^0=(1/2, 1/2)$.

Рисунок 1

5.Графически решить игру: $A = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$

Действуя по алгоритму геометрического нахождения игры $M \times 2$ (рисунок 2), находим, что цена игры $V=4$, нижняя цена игры: $\alpha=3$, верхняя цена игры: $\beta=5$, оптимальная стратегия игрока B: $Q^0=(2/3, 1/3)$.

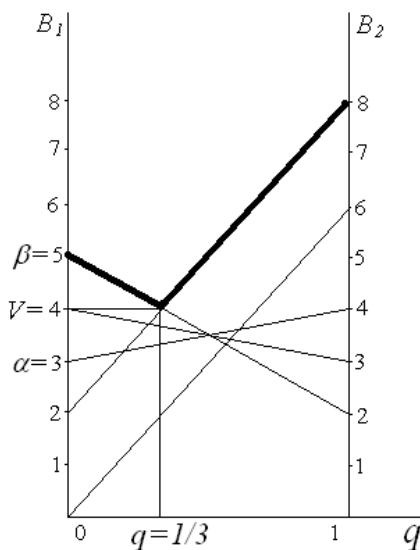


Рисунок 2

5.Тестовые задания

1. Модель – это

1.1. аналог (образ) оригинала, но построенный средствами и методами отличными от оригинала +

- 1.2. подобие оригинала
- 1.3. копия оригинала
2. Экономико-математическая модель – это
 - 2.1. математическое представление экономической системы (объектов, задачи, явлений, процессов и т. п.) +
 - 2.2. качественный анализ и интуитивное представление объектов, задач, явлений, процессов экономической системы и ее параметров
 - 2.3. эвристические описание экономической системы (объектов, задачи, явлений, процессов и т. п.)
3. Метод – это
 - 3.1. подходы, пути и способы постановки и решения той или иной задачи в различных областях человеческой деятельности +
 - 3.2. описание особенностей задачи (проблемы) и условий ее решения
 - 3.3. требования к условиям решения той или иной задачи
4. Выберите неверное утверждение
 - 4.1. ЭММ позволяют сделать вывод о поведении объекта в будущем
 - 4.2. ЭММ позволяют управлять объектом +
 - 4.3. ЭММ позволяют выявить оптимальный способ действия
 - 4.4. ЭММ позволяют выявить и формально описать связи между переменными, которые характеризуют исследования
5. Экономико-математическая модель межотраслевого баланса – это
 - 5.1. макроэкономическая, детерминированная, имитационная, матричная модель
 - 5.2. микроэкономическая, детерминированная, балансовая, регрессионная модель
 - 5.3. макроэкономическая, детерминированная, балансовая, матричная модель +
 - 5.4. макроэкономическая, вероятностная, имитационная, матричная модель
6. Найти экстремум функции $f(x)$ при выполнении ограничений $R_i(x) = a_i$, $\varphi(x) \leq b_j$, наложенных на параметры функции – это задача
 - 6.1. условной оптимизации +
 - 6.2. линейного программирования
 - 6.3. безусловной оптимизации
 - 6.4. нелинейного программирования
 - 6.5. динамического программирования
7. Задача, включающая целевую функцию f и функции Φ , входящие в ограничения, является задачей линейного программирования, если
 - 7.1. все Φ и f являются линейными функциями относительно своих аргументов +
 - 7.2. все Φ являются линейными функциями относительно своих аргументов, а функция f – нелинейна
 - 7.3. функция f является линейной относительно своих аргументов, а функции Φ – нелинейны
 - 7.4. только часть функций Φ и функция f являются линейными относительно своих аргументов
8. Множество всех допустимых решений системы задачи линейного программирования
 - 8.1. является
 - 8.2. выпуклым +
 - 8.3. вогнутым
 - 8.4. одновременно выпуклым и вогнутым
9. Если задача линейного программирования имеет оптимальное решение, то целевая функция достигает нужного экстремального значения в одной из
 - 9.1. вершин многоугольника (многогранника) допустимых решений +
 - 9.2. внутренних точек многоугольника (многогранника) допустимых решений
 - 9.3. точек многоугольника (многогранника) допустимых решений

10. В задачах линейного программирования решаемых симплекс-методом искомые переменные должны быть
 - 10.1. неотрицательными +
 - 10.2. положительными
 - 10.3. свободными от ограничений
 - 10.4. любыми
11. Симплексный метод решения задач линейного программирования включает
 - 11.1. определение одного из допустимых базисных решений поставленной задачи (опорного плана)
 - 11.2. определение правила перехода к не худшему решению
 - 11.3. проверку оптимальности найденного решения
 - 11.4. определение одного из допустимых базисных решений поставленной задачи (опорного плана), определение правила перехода к не худшему решению, проверка оптимальности найденного решения +
12. Графический способ решения задачи линейного программирования – это
 - 12.1. построение прямых, уравнения которых получаются в результате замены в ограничениях знаков неравенств на знаки точных равенств
 - 12.2. нахождение полуплоскости, определяемой каждым из ограничений задачи
 - 12.3. нахождение многоугольника допустимых решений
 - 12.4. построение прямой $F = h = \text{const} \geq 0$, проходящей через многоугольник решений
 - 12.5. построение вектора C , перпендикулярного прямой $F = h = \text{const}$
 - 12.6. передвижение прямой $F = h = \text{const}$ в направлении вектора C (в сторону увеличения h), в результате чего находят либо точку (точки), в которой целевая функция принимает максимальное значение, либо устанавливают неограниченность сверху функции на множестве допустимых решений
 - 12.7. определение координат точки максимума функции и вычисление значения целевой функции в этой точке
 - 12.8. все перечисленные ответы в этом задании +
13. Задача линейного программирования не имеет конечного оптимума, если
 - 13.1. в точке A области допустимых значений достигается максимум целевой функции F
 - 13.2. в точке A области допустимых значений достигается минимум целевой функции F
 - 13.3. система ограничений задачи несовместна
 - 13.4. целевая функция не ограничена сверху на множестве допустимых решений +
14. При приведении задачи линейного программирования (ЛП) к виду основной задачи ЛП ограничения вида « $<$ или « $=$ » преобразуются в ограничения равенства добавлением к его левой части дополнительной неотрицательной переменной. Вводимые дополнительные неизвестные имеют вполне определенный смысл. Так, если в ограничениях исходной задачи ЛП отражается расход и наличие производственных ресурсов, то числовое значение дополнительной переменной в решении задачи, записанной в виде основной имеет смысл
 - 14.1. двойственной оценки ресурса
 - 14.2. остатка ресурса +
 - 14.3. нехватки ресурса
 - 14.4. стоимости ресурса
15. Если ресурс образует «узкое место производства», то это означает
 - 15.1. ресурс избыточен
 - 15.2. ресурс использован полностью +
 - 15.3. двойственная оценка ресурса равна нулю

16. Критерием остановки вычислений в алгоритме поиска оптимального решения методами одномерной оптимизации является условие
 - 16.1. отношение длины текущего интервала неопределенности к длине первоначального интервала меньше заданной величины ϵ
 - 16.2. значение целевой функции (ЦФ), вычисленное в текущей точке, меньше значения ЦФ, вычисленного в последующей точке
 - 16.3. отношение длины текущего интервала неопределенности к длине первоначального интервала больше заданной величины ϵ
 - 16.4. значение ЦФ, вычисленное в текущей точке, меньше значения ЦФ, вычисленного в предыдущей точке +
17. Если целевая функция и все ограничения выражаются с помощью линейных уравнений, то рассматриваемая задача является задачей
 - 17.1. динамического программирования
 - 17.2. линейного программирования +
 - 17.3. целочисленного программирования
 - 17.4. нелинейного программирования
18. Модель задачи линейного программирования, в которой целевая функция исследуется на максимум и система ограничений задачи является системой уравнений, называется
 - 18.1. стандартной
 - 18.2. канонической +
 - 18.3. общей
 - 18.4. основной
 - 18.5. нормальной
19. Модель задачи линейного программирования, в которой целевая функция исследуется на максимум и система ограничений задачи является системой неравенств, называется
 - 19.1. стандартной
 - 19.2. канонической
 - 19.3. общей +
 - 19.4. основной
 - 19.5. нормальной
20. В линейных оптимизационных моделях, решаемых с помощью геометрических построений число переменных должно быть
 - 20.1. не больше двух +
 - 20.2. равно двум
 - 20.3. не меньше двух
 - 20.4. не больше числа ограничений +2
 - 20.5. сколько угодно
21. Задача линейного программирования может достигать максимального значения
 - 21.1. только в одной точке
 - 21.2. в двух точках
 - 21.3. во множестве точек
 - 21.4. в одной или двух точках
 - 21.5. в одной или во множестве точек +
22. Если в прямой задаче, какое либо ограничение является неравенством, то в двойственной задаче соответствующая переменная
 - 22.1. неотрицательна +
 - 22.2. положительна
 - 22.3. свободна от ограничений
 - 22.4. отрицательная
23. Транспортная задача является задачей Программирования
 - 23.1. динамического
 - 23.2. нелинейного

- 23.3. линейного +
- 23.4. целочисленного
- 23.5. параметрического
- 24. Если в транспортной задаче объем спроса равен объему предложения, то такая задача называется
 - 24.1. замкнутой
 - 24.2. закрытой +
 - 24.3. сбалансированной+
 - 24.4. открытой
 - 24.5. незамкнутой
- 25. Если в транспортной задаче объем запасов превышает объем потребностей, в рассмотрение вводят
 - 25.1. фиктивный пункт производства
 - 25.2. фиктивный пункт потребления +
 - 25.3. изменения структуры не требуются

Основные понятия. Классификация игр.

Дать ответ: (В – Верно, Н – Неверно)

1. Всякая конфликтная ситуация является антагонистической.
 2. Всякая антагонистическая ситуация является конфликтной.
 3. Цель теории игр - выработка рекомендаций по разумному поведению участников конфликта.
 4. Недостатком теории игр является предположение о полной разумности противников.
 5. В теории игр предполагается, что не все возможные стратегии противника известны.
 6. Теория игр включает элементы риска, неизбежно сопровождающие разумные решения в реальных конфликтах.
 7. В теории игр нахождение оптимальной стратегии осуществляется по многим критериям.
 8. Стратегические игры состоят только из личных ходов.
 9. В парной игре число стратегий каждого участника равно двум.
 10. Игры, в которых действия игроков направлены на максимизацию выигрышей коалиций без последующего их разделения между игроками, называются коалиционными.
- (Ответы: 1-Н; 2-В; 3-В; 4-В; 5-Н; 6-Н; 7-Н; 8-Н; 9-Н; 10-В.)

ТЕСТЫ

Антагонистические игры(1)

Дать ответ: (В – Верно, Н – Неверно)

1. Матричная игра является антагонистической, поскольку выигрыш одного игрока равен проигрышу второго (выигрышу второго с обратным знаком).
2. Название “матричная игра” произошло из-за того, что такая игра описывает платежной функцией в виде матрицы.
3. В матричной игре каждый из игроков делает свой ход независимо от хода противника, предполагая лишь, что противник разумен, как и он сам.
4. Оптимальной стратегией игрока в матричной игре называется такая, которая обеспечивает ему максимальный средний выигрыш.
5. Принципом максимина руководствуются очень азартные и рискованные люди (оптимисты).
6. Принцип максимина предполагает выбор той стратегии, при которой минимальный выигрыш для различных стратегий максимален.
7. Стратегии, выбираемые из принципа максимина, называются максиминными.
8. Нижняя цена матричной игры всегда равна верхней цене.

9. Случай, когда нижняя цена матричной игры равна верхней цене, соответствует наличию у платежной матрицы седловой точки.

10. Платежная матрица игры не может иметь несколько седловых точек.

(Ответы: 1-В; 2-В; 3-В; 4-В; 5-Н; 6-В; 7-В; 8-Н; 9-В; 10-Н.)

Критерии оценки тестовых заданий:

- 0,5 баллов - за каждый правильный ответ на вопрос;

- 0 баллов – обучающийся дал неправильный ответ на вопрос.

Шкала оценивания теста:

Более 50% правильных ответов из 10 тестовых вопросов – зачтено;

менее 50% правильных ответов – незачтено.

6. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины

6.1. Основная литература				
	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Количество
Л1.1	Гетманчук, А.В.	Экономико-математические методы и модели [Электронный ресурс] : учебное пособие https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=496107&sr=1	Москва : Дашков и Ко, , 2018	ЭБС
Л1.2	Федосеев В.В.	Экономико-математические методы и прикладные модели [Электронный ресурс] : учебное пособие https://biblioclub.ru/index.php?page=book_red&id=114535&sr=1	Москва : Юнити- Дана,, 2015	ЭБС
6. 2. Дополнительная литература				
	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Количество
Л2.2	Е.О. Окунева, С.И. Моисеев.	Методы оптимальных решений [Электронный ресурс] : Учебное пособие http://www.iprbookshop.ru/44607.html	Воронеж: Воронежский филиал Московского гуманитарно-экономического института, 2013	ЭБС
6. 3. Методические разработки				
	Авторы,	Заглавие	Издательство,	Количество

ЛЗ.1	Л.В. Азарова, Д.А. Азаров.	Теория игр и принятие решений: [Электронный ресурс] : учеб.-метод. пособие. https://ntb.donstu.ru/content/teoriya-igr-i-prinyatie-resheniy	Ростов н/Д: Издательский центр ДГТУ, 2016	ЭБС
ЛЗ.2	Т.А. Иваночкина, А.Е. Сафронов, А.А. Алукханын	Применение теории игр к экономическим задачам: [Электронный ресурс] : метод. указания к практическим занятиям по дисциплине «Экономико-математическое моделирование». https://ntb.donstu.ru/content/primenenie-teorii-igr-k-ekonomicheskim-zadacham-metodicheskie-ukazaniya-k-prakticheskim-zanyatiyam-po-discipline-ekonomiko-matematicheskoe-modelirovanie	Ростов-на- Дону, Донской гос. техн. ун-т, , 2018	ЭБС

Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети "Интернет"

1	Национальный Открытый Университет "ИНТУИТ" https://www.intuit.ru/
---	--

Перечень программного обеспечения

1	Google Chrome
2	Microsoft Office

Перечень информационных справочных систем, профессиональные базы данных

1	Справочно-правовая информационная система Консультант+ http://www.consultant.ru
2	База данных ScienceDirect https://www.sciencedirect.com/#open-access
3	Профессиональная база данных ЭБС Университетская библиотека онлайн https://biblioclub.ru/
4	Профессиональная база данных ЭБС IPRbooks http://www.iprbookshop.ru/
5	Профессиональная база данных ЭБС Лань https://e.lanbook.com/